II esonero e I appello – 15/2/2013

N.B. • *Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*
• *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente!* **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio**.
• **I appello***: tutti gli esercizi esclusi Es 1, (iii) e (v) ed Es 4.*
• **II esonero***: tutti gli esercizi esclusi Es 1, (v) e (vi) ed Es 5.*
• **Attenzione:** *è obbligatorio svolgere il primo esercizio.*

Es 1 [Pt. 30] (i) Enunciare il principio del massimo per l'equazione del calore su domini parabolici e dedurne l'unicità.

(ii) Discutere la formula di D'Alembert.

(iii) Discutere la soluzione fondamentale dell'equazione del calore.

(iv) Discutere il metodo di Fourier per la soluzione dell'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n$ con dati iniziali C^∞ a supporto compatto.

(v) Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(1,t) \ , & t > 0 \\ u(x,0) = \ \operatorname{sen} 3\pi x + 2 \operatorname{sen} 10\, \pi x \ , & 0 < x < 1 \ , \\ u_t(x,0) = 0 \ . & \end{cases}$$

(vi) Definire la funzione di Green per il cerchio.

(vii) Enunciare e dimostrare il teorema di Liouville per funzioni armoniche.

Es 2 [Pt. 30] Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \ , & x \in \Omega = (0,\pi)^3 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 \ \ , & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = \ x_1 x_2 x_3 (x_1 - \pi)(x_2 - \pi)(x_3 - \pi) \ , & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = 0 \ , & x \in \Omega \ . \end{cases}$$

Es 3 [Pt. 20] Sia u la soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \ , & x \in \mathbb{R}^3, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 \ \ , & x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = h(x) \ , & x \in \mathbb{R}^3 \ . \end{cases}$$

with $h \in C^\infty$ con supporto contenuto in $B(0,R)$.

(i) La funzione $x \to u(x,t)$ è a supporto compatto? Se sì , trovare una sfera in cui sia contenuto il supporto,

(ii) Trovare $C > 0$ tale che $|u(x,t)| \le C/t$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ e $t > 0$.

Es 4 [Pt. 20] Si consideri l'equazione integrale $\phi(t) = t + \int_0^t ts\phi(s)ds$. Dire di che tipo di equazione si tratta. Discutere l'unicità della soluzione per t "piccoli". Trasformare l'equazione integrale in una equazione differenziale e risolverla.

Es 5 [Pt. 20] Risolvere l'equazione

$$\Delta u = 0 \ , x \in (0,\pi)^2$$
$$u(\pi, x_2) = u(x_1, \pi) = u(0, x_2) = 0 \ , \ u(x_1, 0) = x_1^2 (x_1 - \pi) \ .$$